2023/12/26

薮友良

第 10 章の答え

1 最小 2 乗推定量の式は $\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}\overline{X}$ ですから、これを書き換えると $\overline{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\overline{X}$ となります。よって、X= $\overline{X}$ のとき、回帰直線上の点は Y= $\overline{Y}$ となります。

2. Y の理論値の偏差 2 乗和

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$$

を書き換えましょう。p252 から理論値は

$$\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$$

となり、練習問題 1 から

$$\bar{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\bar{X}$$

となりますから、これらを偏差 2 乗和の式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}\bar{X}))^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta}X_i-\hat{\beta}\bar{X})^2$$

$$=\hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

が得られます。この偏差 2 乗和を決定係数の式に代入すると、決定係数の別表現が得られます。

$$\boldsymbol{R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{\hat{\beta}^2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

この式は、決定係数を計算するので便利です (X と Y それぞれの偏差 2 乗和、$\hat{\beta}$だけで計算できる)。

さらに上式を書き換えてみましょう。$\hat{\beta}$の式を上式に代入すると、

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}))^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

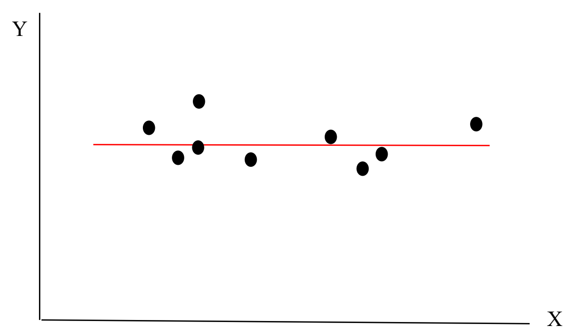
$$=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}\right)^2=\left(\frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}}\right)^2=r_{XY}^2$$

となります。つまり、決定係数とは、X_i と Y_i との相関係数 r_{xy} を 2 乗したものに他ならないのです。

3　(1)決定係数の別表現（練習問題 2 参照）から、$\hat{\beta}=0$ なら $R^2=0$ といえます。

$$\boldsymbol{R^2=\hat{\beta}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=0\times\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=0}$$

直観的には、$\hat{\beta}=0$ なら、X が変動しても Y の変動を全く説明できないため、R^2 は 0 となるといえます(下図参照)。



(2)　決定係数が 0 であっても、$\hat{\beta}=0$ とは必ずしも言えません。たとえば、X の変動に比べて、Y の変動が非常に大きいなら、次の別表現から R^2 は 0 となります。

$$\boldsymbol{\hat{\beta}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

4　最小 2 乗推定量の式に、表で計算された値を代入すると、

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\frac{-13.2}{1.2}=-11$$

$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}=11.6-11\times0.4=16$$

となります。β の推定値は-11 ですから、雨が降ると（X が 1 になる）売り上げは 11 万円減ることになります。α の推定値は 16 ですから、天気が晴れ（X=0）

であれば売り上げは 16 万円となります[1]。2) 決定係数は、練習問題 2 の別表現を用いると、簡単に求めることができます。別表現は

$$\boldsymbol{R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2} = (-11)^2 \frac{1.2}{153.2}}$$

ですから、これを計算すると 0.947 となります。よって、Y の全変動のうち 94.7%はモデルで説明できているといえます。

5. 残差の性質を用いて証明ができます（残差の性質は p263 参照）。まず、残差の和は 0 から、残差の平均も 0 となります。よって、残差と説明変数の標本共分散の分子は、

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \hat{u}_i - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i$$

となります。残差と説明変数の積和は 0 ですから、第 1 項は 0 となります。また、残差の和は 0 ですから第 2 項も 0 となります。以上から、標本共分散は 0 となり、標本相関係数も 0 となります。

6. 実証研究をしていると、係数の解釈をどのようにするかわからなくなることがあります。とくに変数の対数をとったり、とらなかったりすると解釈がとたんに見えにくくなるものです。係数の解釈は実証分析において重要ですので、練習問題を解くことで学習してもらえたらと思います。

1)について

ここでモデルは$Y = \alpha + \beta X$ですから、Xが 1 単位増えることでYは

$$\big(\alpha + \beta(X + 1)\big) - (\alpha + \beta X) = \beta$$

単位だけ変化します。例えば、β=2 なら、X が 1 単位増えると Y は 2 単位増えることになります。

[1] この結果は次のようにも推定できます。雨の日は 2 日あり平均は(6+4)/2=5 万円、晴れた日は 3 日あり平均は(18+15+15)/3=16 万円です。よって、α は 16、売り上げの差は 5-16=-11 から β は-11 と推定されます。

2) について

ここでモデルは$\ln(Y) = \alpha + \beta\ln(X)$となります。このモデルでは、Y、X ともに対数をとるため、対数・対数(log-log)モデルと呼ばれます。ここでXがX'に変化したとき、YはY'に変化するとしましょう。このとき、モデル式から、

$$\ln(Y') - \ln(Y) = (\alpha + \beta ln(X')) - (\alpha + \beta\ln(X)) = \beta(ln(X') - ln(X))$$

が成立します。上式を β について解くことで

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{ln(X') - ln(X)} = \frac{ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{ln\left(1 + \frac{X' - X}{X}\right)} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{\frac{X' - X}{X}}$$

となります。したがって、β は「X が 1%変化したとき Y が何%変化するか」、つまり、X に関する Y の弾力性となります。例えば、β=0.1 なら、X が 1%増えると Y は 0.1%増えることになります。

3)について

　ここでモデルは$Y = \alpha + \beta\ln(X)$です。このモデルでは、Y は対数をとらず、X だけ対数をとりますので、線形・対数(linear-log)モデルと呼ばれます。ここでXがX'に変化したとき、YはY'に変化するとします。このとき、モデル式から、

$$Y' - Y = (\alpha + \beta ln(X')) - (\alpha + \beta\ln(X)) = \beta(ln(X') - ln(X))$$

が成立します。この関係式を β について解くことで

$$\beta = \frac{Y' - Y}{ln(X') - ln(X)} = \frac{Y' - Y}{ln\left(1 + \frac{X' - X}{X}\right)} \approx \frac{Y' - Y}{\frac{X' - X}{X}}$$

となります。分母が X の変化率、分子が Y の変化量となります。上式は、

$$Y' - Y = \beta\frac{X' - X}{X}$$

と書き換えられますので、X が 1%変化（つまり、0.01）すると、Y は 0.01β 単位変化することがわかります。例えば、β=10 なら X が 1%変化すると Y は 0.01×10=0.1 単位だけ変化します。

4)について

　ここでモデルは$\ln(Y) = \alpha + \beta X$です。Y は対数、X は対数をとりませんから、

対数・線形(log-linear)モデルと呼ばれます。XがX'に変化したとき、YはY'に変化するとします。このとき、モデルの関係式から、

$$\ln(Y') - \ln(Y) = (\alpha + \beta X') - (\alpha + \beta X) = \beta(X' - X)$$

が成立します。この関係式をβについて解くことで

$$\beta = \frac{\ln(Y') - \ln(Y)}{X' - X} = \frac{ln\left(1 + \frac{Y' - Y}{Y}\right)}{X' - X} \approx \frac{\frac{Y' - Y}{Y}}{X' - X}$$

となります。上式は、

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta(X' - X)$$

となります。X が X'へと 1 単位変化したら(つまり、X'－X=1)

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \beta$$

となりますから、X の 1 単位の増加は Y を 100β%だけ変化させます。例えば、β =0.01 であれば、X の 1 単位の増加は Y を 1%増加させることがわかります。